**A INCERTEZA NO MODELO PERT E A DISTRIBUIÇÃO BETA**

1. **O Método das Três Estimativas**

Em muitas situações, os projectos são constituídos por actividades cuja duração é desconhecida, quer de forma exacta quer o seu comportamento probabilístico. No entanto, é quase sempre possível indicar, por recurso a especialistas nas actividades do projecto, ou com base em experiências anteriores, para todas ou para muitas das actividades, três valores ou estimativas para as suas durações:

1. Duração mais provável,
2. Duração optimista,
3. Duração pessimista.

A *duração mais provável*, designada por **()**, é o tempo de duração em condições normais, que se obtém frequentemente quando a actividade se realiza muitas vezes nas mesmas circunstâncias.

A *duração optimista*, designada por **()**, é tempo mínimo requerido para concluir uma actividade se todas as condições em que a mesma é executada forem favoráveis, isto é, tudo decorre num contexto favorável e de bom funcionamento. Em termos práticos, a probabilidade de a actividade ser realizada num tempo inferior à duração optimista é muito pequena, não superior a 1%.

A *duração pessimista*, designada por **(),** é o tempo máximo que a actividade pode levar a ser concluída se as condições forem desfavoráveis, caso em que há manifesta infelicidade, devido, por exemplo, a avaria de máquinas, cortes de corrente eléctrica, doença de algum trabalhador, condições climatéricas adversas, no caso de obras no exterior, atraso nos abastecimentos, etc.

Note-se, no entanto, que não se devem considerar na duração pessimista todos os contratempos extremistas, pois raramente isso acontece. Com efeito, a consideração de eventos, raros, com consequências extremas faz tender a duração pessimista para valores muito elevados, em termos teóricos para infinito (caso em que a actividade não é concluída). Estão neste caso, por exemplo, um incêndio, um embargo por tempo indeterminado, uma epidemia de consequências imprevisíveis, etc.

Utilizando estas três estimativas, parte-se da hipótese (com razoável aderência à realidade de acordo com a prática da gestão de projectos) que o comportamento da duração das actividades segue aproximadamente uma distribuição Beta com Valor Esperado, , e Variância, , dados, respectivamente, pelas expressões

Isto é, o desvio padrão, *σ,*  é um sexto da amplitude de variação (diferença entre estimativas extremas)[[1]](#footnote-1). Assim, quanto maior for a incerteza associada á duração da actividade maior será o seu intervalo de variação, havendo, por isso, maior probabilidade de que a duração efectiva difira significativamente da sua duração esperada.

O valor estimado através da expressão (1) é conhecido por **Estimativa PERT dos Três Pontos**.

Uma das razões que leva a utilizar a distribuição beta nos “Projectos PERT” é que ela se ajusta bem a acontecimentos que ocorrem num intervalo definido por um mínimo e um máximo, finitos, e positivos, aliás, como a distribuição triangular, como é o caso. A utilização das expressões (1) e (2) é explicada no ponto 3, apresentado mais à frente.

1. **Determinação da Duração do Projecto**

A determinação, por via analítica, do comportamento da duração do projecto necessita, no entanto, de algumas hipóteses simplificadoras adicionais, para além da já referida atrás.

**Hipótese 1** (já referida). A duração de cada actividade, quando não conhecida, é suposto ter uma distribuição beta, com média e variância das pelas expressões (1) e (2), no caso da média dada pela média ponderada das três estimativas, e o valor mais provável a pesar mais 4 vezes mais do que uma das restantes estimativas, e a amplitude do intervalo de variação entre os extremosa conter desvios padrões, o que acontece com muitas outras distribuições.

**Hipótese 2.** As durações das actividadesdo projecto são estatisticamente independentes. Com esta hipótese pretende assegurar-se que cada actividade é independente de qualquer outra, o que nem sempre acontece, sobretudo se as circunstâncias que determinam a sua maior ou menor duração são as mesmas que se verificam para outras actividades. Por exemplo, em muitas obras o mau tempo afecta simultaneamente várias actividades. No entanto, o abandono desta hipótese complica, e muito, a sua resolução por via analítica. Debaixo desta hipótese, a variância da soma de várias actividades, por exemplo do caminho crítico, é dada pela soma das variâncias das actividades envolvidas. A duração média de qualquer caminho, em particular do caminho crítico, é a soma das durações médias das actividades que o compõem, independente desta hipótese.

**Hipótese 3**. Assume-se que o caminho crítico, calculado com base nas durações médias das actividades que o compõem, requer sempre mais tempo do que qualquer outro caminho, isto é, é sempre o caminho mais longo (em contexto aleatório). Quando o caminho crítico obtido com base nas durações médias é significativamente mais longo do que qualquer um dos outros, esta hipótese tem boa aderência á realidade.

**Hipótese 4**. A distribuição de probabilidade da duração de qualquer caminho, em particular do caminho crítico, é aproximadamente normal, com média dada pela soma das médias e variância dada pela soma das variâncias das actividades que constituem o caminho. Esta hipótese baseia-se no teorema do limite central que, como sabemos da teoria das probabilidades, estabelece que a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes segue aproximadamente a lei normal, independentemente da distribuição das variáveis parecelas. Quanto mais actividades fizerem parte do caminho maior a sua aderência estatística. Nos problemas práticos de aplicações reais, em geral, o número de actividades dos projectos é elevado, o que confere a esta hipótese boa aderência à realidade.

Designando por

- Duração (variável aleatória) da actividade (i,j), com (i,j) pertencente ao conjunto das actividades do projecto;

– Duração média da actividade (i,j);

– Desvio padrão da duração da actividade (i,j);

– Duração (variável aleatória) do caminho crítico do projecto, calculado com base nas durações médias das actividades críticas;

– Duração média do caminho crítico do projecto;

– Desvio padrão da duração do caminho crítico do projecto;

– Conjunto das actividades do caminho Crítico do projecto;

Vem então

No caso de existir mais do que um caminho crítico com base nas durações médias, considera-se como o que resulta com maior desvio padrão de entre os que apresentam a mesma duração média mais elevada, pois apresenta maior risco e, consequente, maior probabilidade de ser o caminho mais longo, isto é, ser efectivamente o caminho crítico.

A partir de (6) pode então calcular alguns indicadores de risco que ajudam a suportar a decisão, nomeadamente a probabilidade de cumprir o projecto num prazo pré-estabelecido ou negociado, ou então determinar uma data para finalizar o projecto com determinada nível de segurança, ou probabilidade pré-estabelecida.

1. **A Distribuição Beta no Modelo PERT**

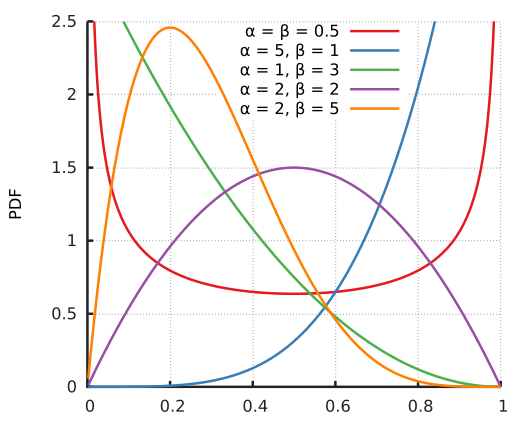
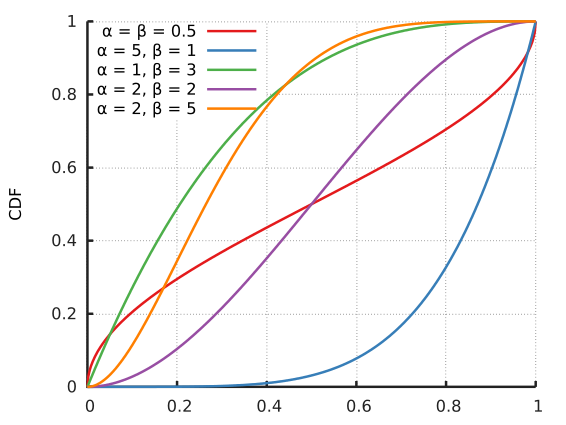
A distribuição Beta é constituída por uma família de distribuições de probabilidade contínuas definidas no intervalo [0, 1] com dois parâmetros positivos, e , que determinam a forma da distribuição.

Uma variável aleatória com função de densidade dada por:

Diz-se que a variável aleatória tem **distribuição beta** com parâmetros e , e escreve-se . A expressão em denominador é designada por **função beta** de parâmetros e (), e escreve-se . A distribuição , com , é por vezes designada por beta normalizada.

Para diferentes valores dos parâmetros e temos diferentes formas da função de densidade e da respectiva função de distribuição, como as figuras a seguir ilustram.

**Família de funções de densidade de**  **Família de Funçõe s de Distribuição de**

Também é fácil de verificar que quando , a expressão (3) é a função de densidade de uma variável aleatória uniforme entre 0 e 1. O que faz desta um caso particular da distribuição Beta, isto é,

Aplicando as definições, obtemos as seguintes expressões para o valor esperado, variância e moda da Distribuição , respectivamente:

No modelo PERT, as variáveis aleatórias envolvidas são as durações das actividades do projecto, pelo que os valores assumidos estão genericamente no intervalo , que é diferente do intervalo considerado. Para resolver esta questão, procede-se a uma mudança de variável aleatória, através de uma transformação linear do tipo

A nova varável aleatória , duração da actividade, tem então a seguinte função de densidade:

Diz-se então que T tem distribuição Beta no intervalo , com parâmetros e e escreve-se simbolicamente

Aplicando as propriedades dos valores esperados, vem

Fazendo e notando, em (9), que *,* e substituindo em (9), vem o valor esperado em função de , valor mínimo assumido pela variável , de valor máximo assumido por , e de , moda de ,

Como no PERT se considera como estimativa para a *duração* *optimista*, como estimativa para a *duração pessimista* e como estimativa para a *duração mais provável*, verifica-se, a partir de (12), que a média das durações é função destas três estimativas, e a partir de (10) que a variância das durações é função apenas e , para além de ambas serem ainda função de e .

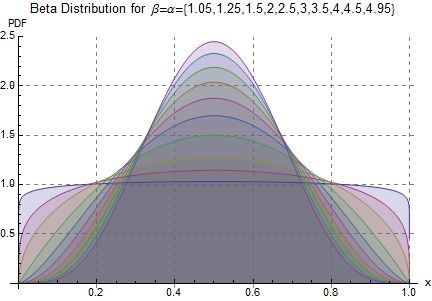
Consoante os valores de e , assim teremos valores para a duração mais provável, para a duração média e para a variância da duração. Por exemplo, com e , tem-se

Mais geralmente, para valores de , em que a distribuição é simétrica, a expressão (12) dá sempre valores exactos para a média, sendo a variância dada pela expressão

Donde se conclui que:

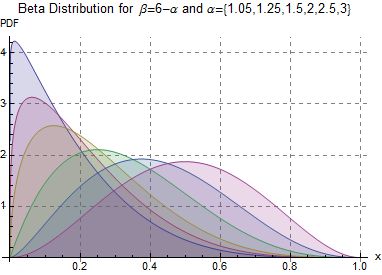
* para valores de a expressão (10) sobreavalia a variância,
* para valores de a expressão (10) dá valores exactos para a variância,
* para valores de a expressão (10) subavalia a variância.

A figura a seguir, com o domínio da varável aleatória no intervalo [0, 1], ilustra para diferentes valores de estas conclusões.



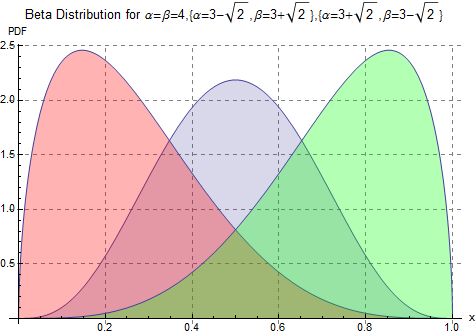
Quando , a variância é dada pela expressão

sendo a representação gráfica, para diversos valores de , dada pela figura abaixo.



No método PERT, considera-se e quando a moda é maior que (enviesamento à esquerda), e quando a moda é menor que (enviesamento á direita) e quando há simetria. Nestes casos, substituindo em (12) e (10), α e β pelos valores referidos, obtém-se, respectivamente,

Estes valores para e , ou valores próximos destes, traduzem formas para a distribuição que se ajustam bem à prática da gestão de projectos. A figura abaixo ilustra, no intervalo {0, 1] estes casos.



A estimativa da média através da expressão (13) é conhecida na literatura e na gestão de projectos PERT como **Estimativa PERT dos três Pontos,** como se disse atrás, **ou Método PERT das Três estimativas.**

Manuel Ramalhete

ISEG, 2015-02-24

1. Esta fórmula é também uma aproximação baseada no facto de quase todos os valores de um distribuição unimodal estarem contidos num intervalo centrado no valor médio e de semiabertura igual a três vezes o desvio padrão. Para a distribuição normal, por exemplo, essa percentagem é superior a 99% e nenhuma outra distribuição tem percentagem inferior a 89% da sua área dentro daquele intervalo, tal como estabelece a desigualdade de Tchebychev. Por isso se estima frequentemente o desvio padrão como 1/6 da amplitude do intervalo de variação. [↑](#footnote-ref-1)